

21119

B. Sc. (Final Year) Examination, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper : Second

(Real and Complex Analysis)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल कीजिए।

Note: Attempt of all sections as directed.

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×3=15

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।

Note: Attempt all questions. Each question carries 3 marks.

1. उपरि एवं निम्न रीमान समाकलन को परिभाषित कीजिए।

Define Lower and Upper Riemann integrals.

अथवा

Or

आंशिक अवकलज को परिभाषित कीजिए।

Define Partial derivative.

2. विषम समाकल को परिभाषित कीजिए।

Define Improper integral.

अथवा

Or

यदि $a > 0$, $b > 0$, तब सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}$

If $a > 0$, $b > 0$, then prove that $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}$

3. दूरीक समष्टि को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

Define metric space with example.

अथवा

Or

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए—

(i) सीमा बिन्दु

(ii) व्युत्पन्न समुच्चय

Define following :

(i) Limit point

(ii) Derived set

4. दूरीक समष्टि में संतत फलन को परिभाषित कीजिए।

Define continuous function in metric space.

अथवा

Or

संहत समष्टि को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

Define compact space with example.

5. विश्लेषिक एवं नियमित फलन को परिभाषित कीजिए।

Define analytic and regular function.

अथवा

Or

अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।

Define conformal mapping.

खण्ड-‘ब’

Section-‘B’

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note: Attempt all five questions. Each question carries 5 marks.

6. समाकलन गणित का मूलभूत प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध लिखिए।

State and prove fundamental theorem of integral calculus.

अथवा

Or

यंग प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Young's theorem.

7. दर्शाइए कि $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ अभिसारी है।

Show that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ is convergent.

अथवा

Or

फलन $f(x) = x, -\pi < x < \pi$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find Fourier series for the function $f(x) = x, -\pi < x < \pi$.

8. केन्टर सर्वनिष्ठ प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Cantor's intersection theorem.

अथवा

Or

बनाख संकुचन को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Banach contraction principle.

9. माना कि (X, d) तथा (Y, ρ) दो दूरीक समष्टियाँ हैं और $f: X \rightarrow Y$ एक फलन है तब सिद्ध कीजिए कि f संतत होगा यदि और केवल यदि $f^{-1}(G)$, X में विवृत है जबकि G , Y में विवृत है।

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f: X \rightarrow Y$ be a function then f is continuous if and only if $f^{-1}(G)$ is open whenever G is open in Y .

अथवा

Or

माना (X, d) कि एक दूरीक समष्टि है तथा $A, B \subseteq X$ यदि $d(A, B) > 0$ तब सिद्ध कीजिए कि A तथा B पृथक्कृत समुच्चय होते हैं।

Let (X, d) be a metric space and $A, B \subseteq X$. If $d(A, B) > 0$ then prove that A and B are separated.

10. कॉशी-रीमान आंशिक अवकल समीकरण लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy-Riemann partial differential equation.

अथवा

Or

उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 1, i = -1$ को क्रमशः $w = i, 0, -i$ पर रूपान्तरण करता है।

Find the Mobius transformation which transform points $z = 1, i = -1$, to $w = i, 0, -i$.